工程数学

线性代数

矩阵的特征值及二次型

- n阶行列式
  - 行列式的定义
    - 克拉默法则不要求大量的关键的问题进行求解，会解二元一次方程组的行）
    - 代数余子式
    - 余子式
  - 行列式的性质
    - 性质2 任意两行（列）互换，行列式需要变号
    - 性质3 若行列式某行或者某列元素中有公因子，则可以把公因子提出来。（提取公因子的限制条件行，列）
    - 性质4 若行列式中某行的元素均为两项之和，则此行列式等于两个行列式之和
    - 性质5 若行列式的某行（列）乘以一个常数加到另一行（列），行列式的值不变。
    - 性质6 行列式可以展开，利用代数余子式
    - 性质7 行列式任一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为0。
  - 行列式的计算
    - 上三角行列式
    - 下三角行列式
    - 两三角行列式的数字相乘即可
    - 代数余子式
- 矩阵
  - 矩阵的概念
    - 行矩阵
    - 列矩阵
    - 主副对角线
    - 零矩阵
    - 矩阵相等
  - 矩阵的运算
    - 矩阵的加法
      - 交换律
      - 结合律
    - 数与矩阵的乘法
      - 与行列式的乘法不同，行列式是两个数相乘，但是乘的对象是矩阵中每个元素都乘以这个数
    - 矩阵的乘法
      - 左边的矩阵A的列数与右边矩阵的行数相等时才能相乘
      - 两个矩阵的乘积依旧是矩阵，行数等于左矩阵A，列数等于右矩阵B
      - 行乘列法则
      - 结合律
      - 分配律
      - 1. (kA)C
      - 2. 1. (AB)ᵀ=1ᵀA(B)=A(B
      - 3. A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA
      - 即不满足交换律
    - 矩阵的转置
      - 矩阵的转置的概念
        - 1. $(A^T)^T=A$
        - 2. $(A+B)^T=A^T+B^T$
        - 3. $(AB)^T=B^TA^T$
        - 4. $(kA)^T=kA^T$
      - 转置需要满足的规律
  - 特殊矩阵
    - 对角矩阵
      - 单位阵/单位对角矩阵
    - 上三角矩阵
    - 下三角矩阵
    - 对称矩阵
      - 定义：满足 $A=A^T$
  - n阶方阵的行列式
    - 定义：对于一个n阶方阵A，如果有n阶方阵B，且满足AB=BA=I，则称矩阵A可逆，称为A的逆矩阵。
  - 可逆矩阵
    - 逆矩阵的判定：方阵A是非奇异的。
    - 伴随矩阵 A^*
    - 充要条件：n阶矩阵A可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，并且有 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
    - 逆矩阵的性质
      - 1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
      - 2. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
      - 3. $|A^{-1}|\neq 0$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$
      - 4. $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
      - 求解逆矩阵的方法
  - 矩阵的初等行变换和初等矩阵
    - 1. 对换变化
    - 2. 倍乘变换
    - 3. 倍加变换
    - 4. 初等行变化 $(A\ I)\to\cdots\to(I\ A^{-1})$ 利用初等行变换求解逆矩阵
  - 矩阵的秩
    - k阶子式的概念
      - 非零子式
    - 矩阵的秩的定义
      - 1. $0\le r(A)\le\min\{m,n\}$
      - 2. $r(A)=r(A^T)$
  - 分块矩阵
    - 分块矩阵的定义
    - 分块矩阵的运算
      - 分块矩阵的加法
      - 分块矩阵的乘法
      - 分块矩阵的转置
- 线性方程组
  - 用高斯消元法解线性方程组
    - 齐次线性方程组
      - 系数矩阵，未知数矩阵，常数矩阵
      - 增广矩阵
      - 同解方程组
      - 一般解
      - 相容方程组
      - 不相容方程组
  - 线性方程组的相容性(有解)
    - 秩相等则有解，不相等则无解
    - 充要条件：$r(A)=r(\overline{A})=r(A,\overline{b})$
    - $r(A)=r(\overline{A})=r(A,\overline{b})=r$，$\overline{b}=r\alpha_1+\cdots+r\alpha_r$，线性方程组有唯一解
    - $\overline{b}=r\alpha_1+\cdots+r\alpha_r$，线性方程组有无穷多解
    - 注意无解与零解
  - n维向量
    - 定义
      - 行向量
      - 列向量
    - n维向量的线性组合
    - 向量组的线性相关性
      - 线性相关
      - 线性无关
      - 对于向量组存在不全为0的常数使得向量组与数乘积的和为零子0，称向量组线性相关，否则称向量组线性无关。
      - r(A)=k则向量组线性无关，即r（A）=k则线性相关
  - 向量组的极大无关组与秩
    - 定义
      - 向量组的秩
      - 对于向量组，其极大无关组所包含向量的个数称向量组的秩
    - 矩阵A的秩=矩阵A的列向量组的秩=矩阵A的行向量组的秩
    - 向量组中的每一个向量由极大无关组线性表出的表达式是唯一确定的
  - 线性方程组解的结构
    - 齐次线性方程组解的结构
      - 关于齐次方程组：AX=0 的解，我们把一些结论归纳如下：（1 当A为m×n矩阵时，A=0没有零解唯充要条件是r(A)=n；（2 当A为m×n矩阵时，A=0有非零解的充要条件是r(A)<n；（3 当A为n阶方阵时，AX=0没有零解的充要条件是r（A）=n，；（4 当A为n阶方阵时，AX=0有非零解的充要条件是r（A）<n，（5 当A为m×n矩阵，且r(A)=r时，方程组AX=0有n-r个自由未知数。
      - 性质1，若X1,X2为AX=0的解，则X1+X2也为AX=0的解
      - 性质2，若X0为AX=0的解，则对于任意实数k，X0亦为它的解
      - 齐次线性方程组n元满足下列两个条件的一组解向量称为AX=0的基础解系：1、线性无关2、方程组AX=0的任何一个解都可以由他们线性表出
      - 如何求齐次线性方程组的基础解系：1、把齐次线性方程组的系数矩阵化成阶梯形。2、当r(A)=r时，r个变量作为自由未知数。3、令所有的自由未知数为0，求出AX=0的一个特解*。4、令自由变量r-1，另四个一个自由未知数为1，其余自由未知数为0，得到AX=0的基础解系X1,X2...Xn-r
    - 非齐次线性方程组解的结构
      - 关于齐次方程组：AX=0 的解，我们把一些结论归纳如下：（1 AX=B有解的充要条件是r(A)=r(A)（2 当A为n阶方阵时，AX=B有唯一解（3 当A为n阶方阵时，若r(A)=r(A)=r<n,则AX=B有无穷多解，也有r-r个自由未知数。（4 当A为n阶方阵时，若r(A)=n,即 $|A|\neq 0$，则AX=B有唯一解
      - $x=\frac{D_j}{D}$ j=1,2,3...n
      - 性质1，若X1,X2为AX=B的解，则X1-X2是方程AX=0的解
      - 性质2，若X0为AX=B的解，X一为AX=0的解，则X0+X一也为AX=B的解
      - 如何求非齐次线性方程组的基础解系：1、把增广矩阵A化为阶梯形行变换化为阶梯形矩阵。2、当r(A)和r(A)=r时，若r是无所有列的列数n个变量作为自由未知数。3、令所有的自由未知数为0，求出AX=B的一个特解*。4、令自变量r-1，另四个一个自由未知数为1，其余自由未知数为0，得到AX=0的基础解系X1,X2...Xn-r
  - 方阵的特征值与特征向量
    - 定义
    - 方法
      - 将其转化为 $(\lambda I-A)x=0$
    - 结论
      - 1. n阶方阵的n个特征值之和等于方阵对角线元素之和（称为迹）
      - 2. n阶方阵的n个特征值的乘积等于方阵的行列式
      - 3. 若方阵A的特征多项式的系数和，到A相应于矩阵的最线性无关的个数不会超过n，即有可能等于也有可能小于n
  - 相似矩阵和实对角化
    - 相似矩阵的概念
      - 性质
      - 矩阵对角化
      - n阶方阵A能对角化的充要条件为A具有n个线性无关的特征向量
    - 实对称矩阵对角化的条件关键点
      - 实对称矩阵的特征值必定是实数，且其一定能对角化
  - 实对称矩阵对角化
    - 向量正交的概念
    - 正交矩阵的概念和性质
      - 正交矩阵的概念
      - 若n阶方阵A满足 $A^TA=E$ 则称A为正交矩阵
    - 正交相似变换
  - 二次型及其标准型，惯性定理和正定二次型
    - 二次型及其标准型
      - 二次型的定义及其标准型
      - 二次型的矩阵表示
      - 二次型的标准形的两种描述
      - 用配方法化二次型为标准型
    - 惯性定理
      - 概念
      - 定义
        - 在实数二次型的任一标准型中，系数为正的平方项个数是唯一确定的，系数为负的平方项的个数也是唯一确定的
    - 正定二次型
      - 概念
      - 如何判定正定矩阵
- 概率论与数理统计
  - 随机事件与概率
    - 随机事件
      - 随机现象与随机事件
        - 概念：统计规律，样本空间，随机事件，必然事件，不可能事件等
      - 事件的包含与相等
        - 事件的和
        - 事件的积
        - 事件的差
        - 互不相容事件
        - 不相容的概念
      - 事件间的关系运算
        - 对立事件与完备事件组
          - 对立事件(逆事件) $\overline{A}$
        - 事件间的关系和运算性质
          - 包含关系
          - 和运算
          - 积运算
          - 和与积运算的分配率
          - 和、积与逆运算的德摩根律
          - 逆运算与互不相容
    - 随机事件的概率
      - 概率的统计定义
        - 频数、频率
        - 性质1，对于任意事件，有0≤P(A)≤1
        - 性质2，P(Ω)=1,P(Ø)=0.
        - 性质3，对于有限个或可数个事件，若他们两两不相容，则他们可以相加
      - 古典概型
        - P(A)=事件A包含的基本事件的个数/基本事件的总数
    - 随机事件概率的计算
      - 加法公式
        - 两个互相容事件A,B之间的概率等于这两个事件的概率和。即P(A+B)=P(A)+P(B)
        - 设A,B是两个随机事件，且B ⊂A，则P(A-B)=P(A)-P(B)。
        - 对任意两个事件A,B有P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)
      - 条件概率和乘法公式
        - 条件概率
          - 设A,B是随机试验E的两个事件，且P(B) >0,则称P(A | B)=P(AB)/P(B)为事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率
        - 乘法公式
          - 设P(A)>0,则事件A与B之积AB的概率等于其中任一事件的概率乘以在该事件发生的条件下另一事件发生的概率，即P(AB)=P(B)P(A | B)
          - 利用乘法公式，可以计算事件A,B同时发生的概率P(AB)
      - 全概率公式
        - 事件的独立性
          - 两种事情任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称二者是独立的，反则则称相关活动
      - 伯努利（Bernoulli）模型
        - 伯努利模型
  - 随机变量及其数字特征
    - 随机变量及其分布
      - 随机变量的概念
        - 随机变量
        - 连续型随机变量
      - 离散型随机变量
        - 离散型随机变量的概率分布
        - 超几何分布
      - 连续型随机变量
        - 概率密度函数
      - 分布函数
        - 性质1，0≤F(x)≤1
        - 性质2，F(x)是单调不减行数
        - $F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$
        - $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$
        - 性质3，F(x)是右连续的，即F(x)=F（x+0）
        - 小分布函数
      - 随机变量函数的分布
    - 随机变量的数字特征
      - 数学期望
        - 离散型随机变量的数学期望
        - 连续型随机变量的数学期望
      - 方差
        - 性质1，E（c）=c,D(c)=0,c为常数
      - 期望和方差的性质
        - 性质2，设X为常数，则E(AX)=kE(X),D(AX)=K^2D(X)
        - 性质3，E(aX+b)=aE(X)+b,D(aX+b)=a^2d(X)
      - 矩
        - 原点矩
        - 中心矩
    - 几种重要的分布及数字特征
      - 几种重要的离散型随机变量的分布
        - 二点分布
        - 二项分布
        - 泊松分布
      - 几种重要的连续型随机变量的分布
        - 均匀分布
        - 指数分布
        - 正态分布
      - 重要分布的数字特征
        - 概率论与数理统计第五章67页
    - 二维随机变量
      - 二维随机变量及其分布函数
        - 联合分布函数
        - 二维离散型随机变量
        - 二维连续型的随机变量
        - 联合分布密度函数
      - 二维随机变量的独立性
        - 相互独立
        - 边缘分布密度
      - 两个随机变量的函数的期望公式
        - 性质1，E(X+Y)=E(X)+E(Y)
        - 性质2，若X、Y相互独立，则E(XY)=E(X*E(Y)
        - 性质3，若X、Y相互独立，则D(X+Y)=D(X)+D(Y)
      - 协方差与相关系数
        - 概念
  - 统计推断
    - 总体和样本
      - 统计量
      - 样本
        - 样本均值
        - 样本方差
        - k阶样本原点矩
        - k阶样本中心矩
    - 总体、样本、统计量
    - 抽样分布
      - χ^2 分布
      - T 分布
      - F分布
    - 参数的点估计
      - 概念
      - 矩估计法
      - 极大似然估计法
        - 似然函数
      - 估计量的评估标准
        - 1. 无偏性
        - 2. 有效性
    - 区间估计
      - 置信区间和置信度的概念
      - 数学期望的区间估计
      - 方差的区间估计
    - 假设检验
      - 假设检验问题
      - 小概率原理
      - 显著性水平α的统计意义
      - 正态总体的假设检验问题
    - 1一1的回归分析
      - 概念
      - 最小二乘法
      - 检测与预测